



U.M.A

Commission OPAM



25^{ièmes} OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Rabat du 1 au 7 juillet 2017

Jour 1 : Mardi 4 juillet 2017

Durée : 4 h 30 min

PROBLÈME 1

On considère la suite réelle (x_n) définie par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$ pour tout entier naturel n .

On définit la suite (y_n) par $y_n = x_n^2 + 2^{n+2}$ pour tout entier naturel n .

Démontrer que pour tout $n > 0$, y_n est le carré d'un entier impair.

PROBLÈME 2

Soient x , y et z des réels strictement positifs tels que $xy + yz + zx = 3xyz$.

Démontrer que $x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$.

Dans quel cas y a-t-il égalité ?

PROBLÈME 3

Soit n un entier strictement positif. Trouver, en fonction de n , le nombre de couples (x, y) d'entiers strictement positifs solutions de l'équation

$$x^2 - y^2 = 10^2 \cdot 30^{2n}.$$

Montrer de plus que ce nombre n'est jamais un carré.