26^{th} PAN AFRICAN MATHEMATICS OLYMPIAD

Nairobi from 23 to 30 June 2018

Day 2 : Thursday, June 28, 2018 **Duration : 4 h 30 min**

Problem 4

Given a triangle ABC, let D be the intersection of the line through A perpendicular to AB, and the line through B perpendicular to BC. Let P be a point inside the triangle. Show that $DAPB$ is cyclic if and only if $\angle BAP = \angle CBP$.

Problem 5

Let a, b, c and d be non-zero pairwise different real numbers such that

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \text{ and } ac = bd.$$

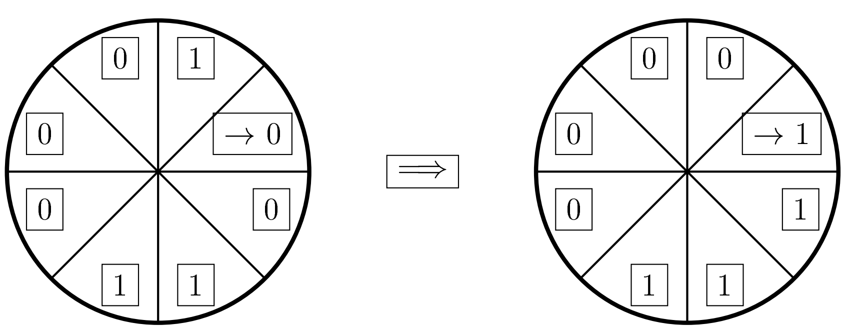
Show that

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \leqslant -12$$

and that -12 is the maximum.

Problem 6

A circle is divided into n sectors ($n \geqslant 3$). Each sector can be filled in with either 1 or 0. Choose any sector $\mathcal{C}$ occupied by 0, change it into a 1 and simultaneously change the symbols x, y in the two sectors adjacent to $\mathcal{C}$ to their complements $1-x$, $1-y$. We repeat this process as long as there exists a zero in some sector. In the initial configuration there is a 0 in one sector and 1s elsewhere. For which values of n can we end this process?



$26^{\text{ièmes}}$ OLYMPIADES PAN AFRICAINES DE MATHÉMATIQUES

Nairobi du 23 au 30 Juin 2018

Jour 2 : Jeudi 28 Juin 2018 **Durée : 4 h 30 min**

PROBLÈME 4

Etant donné un triangle ABC, soit D le point d'intersection de la droite passant par A perpendiculaire à (AB), et de la droite passant par B perpendiculaire à (BC). Soit P un point à l'intérieur du triangle. Montrer que les points D, A, P et B sont cocycliques si et seulement si $\widehat{BAP} = \widehat{CBP}$.

PROBLÈME 5

Soient a, b, c et d des réels non nuls, deux à deux distincts tels que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4 \text{ et } ac = bd.$$

Montrer que

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} \leqslant -12$$

et que -12 est le maximum.

PROBLÈME 6

Un cercle est divisé en n secteurs ($n \geqslant 3$). Chaque secteur peut être rempli soit par 1 ou 0. On choisit n'importe quel secteur $\mathcal{C}$ contenant 0, on le change en 1 et on change simultanément les symboles x, y dans les deux secteurs adjacents à $\mathcal{C}$ en leurs complémentaires $1-x$, $1-y$. On répète ce procédé tant qu'il existe un zéro dans un certain secteur. Dans la configuration initiale il existe un 0 dans un seul secteur et des 1 dans les autres secteurs. Pour quelles valeurs de n peut-on finir ce procédé ?